**Schriftliche Abschlussprüfung 1998** **-Fachoberschule-**
**Fach: M a t h e m a t i k** http://www.kay79.de
**-Technik-**

**Pflichtaufgaben:**

1. Gegeben ist die Funktion *f* mit $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x + 3}{x - 1}$.

1.1 Berechnen Sie die Unstetigkeitsstelle und geben Sie deren Art an!

1.2 Überprüfen Sie durch Rechnung, ob der Graph von *f* Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzt!

1.3 Die Funktion *f* hat je einen lokalen Maximumpunkt und einen lokalen Minimumpunkt. Berechnen Sie deren Koordinaten!

1.4 Ermitteln Sie die Asymptotengleichung!

1.5 Untersuchen Sie die Funktion *f* im Unendlichen!

1.6 Zeichnen Sie den Graph von *f* in ein geeignetes Koordinatensystem! Die Berechnung weniger weiterer Punkte ist zu empfehlen. Zeichnen Sie die Asymptoten in dasselbe Koordinatensystem ein!

1.7 Der Graph der Funktion, die Gerade $y = g(x) = x + 2$, und die Parallelen zur $y$-Achse mit $x = 2$ und $x = 6$ begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
(Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung der Funktion *f* als Summe einer ganzrationalen und einer gebrochenrationalen Funktion – siehe auch 1.4!)

2. Gegeben sind die Punkte $A$ (2; -3; 5) und $B$(1; 2; -1).

2.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden $g_1$ durch die Punkte $A$ und $B$!

2.2 Untersuchen Sie die Lagebeziehungen zwischen der Geraden $g_1$ und der

Geraden $g_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

! Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt!

2.3 Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ortsvektor zu den Punkt $A$ und $B$!

**Schriftliche Abschlussprüfung 1998** **-Fachoberschule-**

**Fach: M a t h e m a t i k** http://www.kay79.de

**-Technik-**

**Wahlaufgaben:** Von diesen Aufgaben muss nur eine gelöst werden!

3 Die Funktion $F$ sei mit $y = F(x) = 2x \cdot e^{-0,25x^2}$ eine Stammfunktion von $y = f(x)$.

3.1 Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!

3.2 Die Funktion $f$ besitzt drei lokale Extrempunkte.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte (einschließlich Nachweis!)

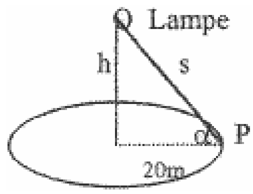
3.3 Zeichnen Sie den prinzipiellen Verlauf des Graphen von $f$!
Berücksichtigen Sie dabei auch die Nullstellen $x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}$!

3.4 Der Graph von $f$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie deren Inhalt!

4 Ein kreisförmiger Straßenplatz mit einem Radius von 20m soll von der Mitte aus so beleuchtet werden, dass der Rand des Platzes möglichst hell wird.
Für die Lichtstärke $I$ in einem Randpunkt gilt:

$$I = k \cdot \frac{\sin\alpha}{s^2} \qquad ;k \text{ - Konstante}$$

4.1 Beschreiben Sie die Lichtstärke $I$ als Funktion $I = f(a)$,
die als unabhängige Variable nur noch den Winkel $\alpha$ enthält!
(siehe Skizze)




4.2 Wie groß muß dieser Winkel sein, damit die Lichtstärke maximal wird? (Auf den Nachweis des Extremums wird verzichtet!)

4.3 Ermitteln Sie die Höhe $h$ für diesen Fall!

# Lösungshinweise:

1.1 x = 1 Polstelle, weil $u(1) = 5 \neq 0$

1.2 $P_x$: $0 = \dfrac{x^2 + x + 3}{x - 1}$

$0 = x^2 + x + 3$

$\rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} - 3}$ $\rightarrow$ es gibt kein $P_x$

$P_y$: $y = f(0) = \dfrac{3}{-1} = -3$ $P_y(0; -3)$

1.3 $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1) - (x^2 + x + 3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 4}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 4)2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 4)2}{(x-1)^3} = \dfrac{10}{(x-1)^3}$

**Extrempunkte:**

$0 = \dfrac{x^2 - 2x - 4}{(x-1)^2} \Rightarrow 0 = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$ ($x_1 \approx -1{,}24$; $x_2 \approx 3{,}24$)

**Nachweis:**

$f''(x_1) = \dfrac{10}{(-1{,}24 - 1)^3} < 0 \Rightarrow$ an der Stelle x = -1,24 liegt ein lokales Maximum.

$f''(x_2) = \dfrac{10}{(3{,}24 - 1)^3} > 0$ $\Rightarrow$ an der Stelle x = 3,24 liegt ein lokales Minimum.

$P_{Max}$ (-1,24; -1,47) $P_{Min}$ (3,24; 7,47)

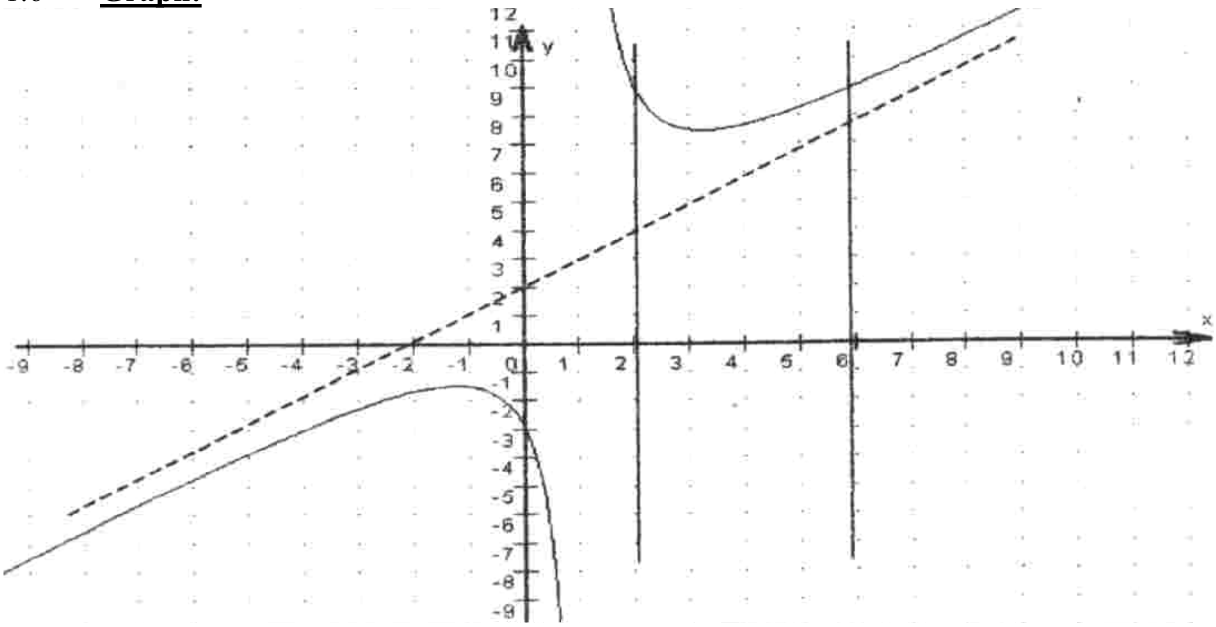
1.4 **Asymptotengleichung:**

$(x^2 + x + 3) \div (x - 1) = x + 2 + \dfrac{5}{x - 1}$ $\Rightarrow$ $y_A = x + 2$

1.5 **Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left( x + 2 + \frac{5}{x - 1} \right) = \pm\infty$$

1.6 **Graph:**




1.7 **Flächenberechnung:**

$$A = \int_2^6 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_2^6 \left( x + 2 + \frac{5}{x-1} - (x+2) \right)dx = [5\ln(x-1)]_2^6 \approx 8{,}05FE$$

2. A(2 ; -3 ; 5) B(1; 2 ; -1)

2.1 **Geradengleichung:**

$g_1 :$ $\vec{x} = x_A + t \cdot \left(\overrightarrow{x_B} - \overrightarrow{x_A}\right)$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

2.2 **Lagebeziehung :**

$g_2 :$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Untersuchung auf Parallelität :**

$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$-1 = -2 \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = 0{,}5$

$5 = 1 \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = 5$ *Widerspruch*

d.h. Geraden sind nicht parallel

**Untersuchung auf Schnitt:**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Vergleich der Koordinaten liefert die drei Gleichungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| I: | 2 - t = -2 – 2r | | |
| II: | -3 + 5t = 8 + r | | |
| III: | 5 – 6t = -6 + r | → | II-III: t = 2 r = -1 |

<u>Kontrolle:</u> t = 2; r = -1 in I: 2 – 2 = -2 + 2 = 0

S(0; 7; -7)

2.3 **Winkel zwischen den Ortsvektoren:**

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-9}{\sqrt{38 \cdot 6}} = 0{,}59604 \quad \Rightarrow \varphi = 126{,}59°$$

3. $y = F(x) = 2x \cdot e^{-0{,}25x^2}$

3.1 **Ableitungen:**

$$F'(x) = f(x) = 2e^{-0{,}25x^2} + 2x \cdot (-0{,}25 \cdot 2 \cdot x)e^{-0{,}25x^2}$$

3.2 **Extrempunkte:**

$$f'(x) = -2xe^{-0{,}25x^2} + (2 - x^2)(-0{,}25 \cdot 2x)e^{-0{,}25x^2} = (-3x + 0{,}5x^3)e^{-0{,}25x^2}$$

$$f''(x) = (-3 + 3x^2 - 0{,}25x^4)e^{-0{,}25x^2}$$

**Nullstellen der 1. Ableitung:**

$$0 = (-3x + 0{,}5x^3)e^{-0{,}25x^2} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0 \qquad x_4 = \sqrt{6} \qquad x_5 = -\sqrt{6}$$

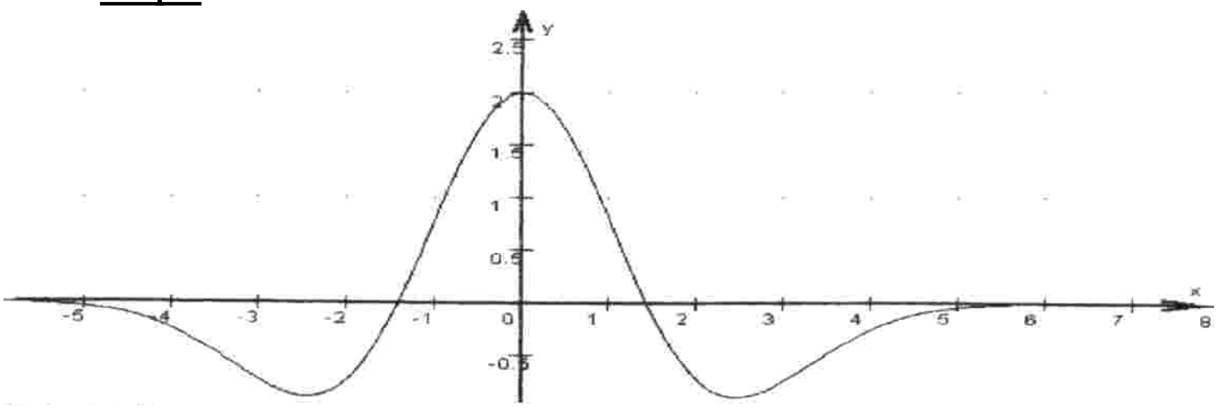
**Nachweis der Extrema:**

$f''(0) = (-3)e^{-0{,}25-0} < 0$ → lok. Max. an $x_3 = 0$

$f''(\pm\sqrt{6}) = (-3 + 3 \cdot 6 - 0{,}25 \cdot 36)e^{-0{,}25-6} > 0$ → lok. Min. an $x_{4,5} = \pm\sqrt{6}$

$$P_{Max}(0;2) \qquad P_{Min1}\left(\sqrt{6}; -\frac{4}{\sqrt{e^3}}\right) \qquad P_{Min2}\left(-\sqrt{6}; -\frac{4}{\sqrt{e^3}}\right)$$

3.3 **Graph:**




3.4 **Flächeninhalt:**

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)dx = 2\int_{0}^{\sqrt{2}} f(x)dx = \left[2xe^{-0{,}25x^2}\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 3{,}43FE$$

4.1 **Zielfunktion:**

$$l(\alpha,s) = k\cdot\frac{\sin\alpha}{s^2}$$

Nebenbedingung: $\cos\alpha = \frac{20}{s} \quad \Rightarrow s = \frac{20}{\cos\alpha}$

$$l(\alpha) = k\cdot\frac{\sin\alpha}{\frac{400}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{400}k\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

$$l(\alpha) = \frac{1}{400}k\cdot\sin\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right) = \frac{1}{400}k\cdot\left(\sin\alpha-\sin^3\alpha\right) \quad \text{DB: } 0° < \alpha < 90°$$

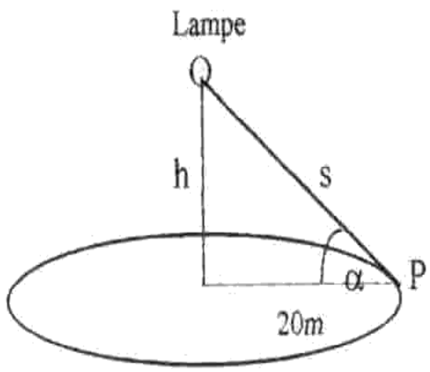
4.2 **Winkelberechnung:**

$$l'(\alpha) = \frac{1}{400}k\cdot\left(\cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\right)$$

$$0 = \left(\cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\right) = \cos\alpha\cdot\left(1-3\sin^2\alpha\right)$$

$$\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° \notin DR$$

$$1-3\sin^2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \alpha > 90° \notin DB$$




$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \alpha = 35{,}3°$$

4.3 **Berechnung der Höhe:**

$$\tan\alpha = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow h = 20\cdot\tan 35{,}3° \qquad \Rightarrow \quad h = 14{,}1m$$