Schriftliche Abschlussprüfung 1996 **-Fachoberschule-**
Fach: M a t h e m a t i k http://www.kay79.de
-Technik-

Pflichtaufgaben:

1 Gegeben ist die Funktion *f* mit $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x \in \Re$!

1.1 Berechnen Sie Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte dieser Funktion!
(einschließlich Nachweise!)

1.2 Zeichnen Sie den Graph von *f* im Intervall [0; 4]!

1.3 Der Graph von *f* und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie deren Inhalt!

1.4 Gegeben ist die Parabel *p* mit der Gleichung $y = p(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 4 \qquad x \in \Re$

1.4.1 Bestimmen Sie die Koordinaten ihres Scheitels!

1.4.2 Zeichnen Sie die Parabel in das Koordinatensystem von 1.2 ein! (Intervall [0; 4])

1.4.3 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Graphen von *f* und *p*!

2 Ein Quader besitzt die Höhe *h*, eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge *a* und ein Volumen von 2000 cm³. Aus Kostengründen ist die Oberfläche zu minimieren.

2.1 Berechnen Sie die minimale Oberfläche! (einschließlich Nachweis des Minimums)

2.2 In welchem Verhältnis stehen für diesen Fall *a* und *h* zueinander?

<u>Wahlaufgaben:</u> Von diesen Aufgaben muß nur eine gelöst werden.

3 Die Funktion *f* mit $y = f(t) = 2e^{-t}\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$
beschreibt die Elongation eines Federschwingers in Abhängigkeit von der Zeit.

3.1 Berechnen Sie die Zeiten *t*, für die die Elongation im betrachteten Intervall Null ist!

3.2 Im vorgegebenen Intervall besitzt die Funktion lokale Extrema.
Berechnen Sie diese und weisen Sie deren Art nach!

3.3 Skizzieren Sie den Graph von *f* im Intervall $0 \le t \le 2\pi$!
(zu wählende Einheiten: t-Achse : 1LE = 1cm
y-Achse : 1LE = 10cm)

3.4 Geben Sie für die Funktion *f* für das Intervall $0 \le t \le 2\pi$ den Wertebereich an!

4 Es seien die Geraden *g* und *h* gegeben.

Die Gerade *g* werde durch den Punkt *B*(-1; -2; -3) und den Richtungsvektor $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ beschrieben, die Gerade *h* sei durch die Punkte *C*(5; 2; 1) und *E*(3; 2; 2) festgelegt.

4.1 Stellen Sie je eine Gleichung in Parameterform für *g* und *h* auf!

4.2 Die Geraden *g* und *h* schneiden einander im Punkt *A*.
Berechnen Sie seine Koordinaten!

4.3 Die Punkte *A*, *B* und *C* bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Winkel $\angle\, ABC$ und den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

4.4 Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ spannen ein Parallelogramm *ABCD* auf.
Ermitteln Sie die Koordinaten von *D*!

Schriftliche Abschlussprüfung 1996 **-Fachoberschule-**
Fach: M a t h e m a t i k http://www.kay79.de
-Technik-

Lösungshinweise:

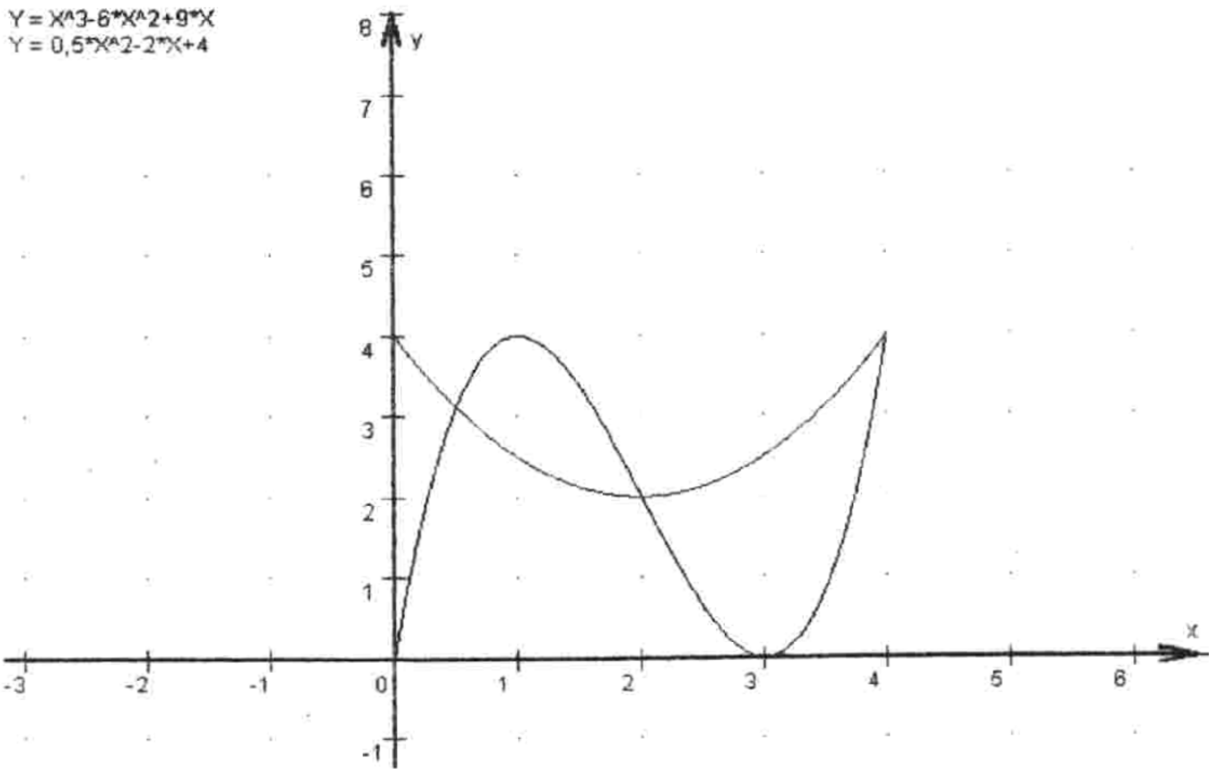
1 $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1.1 $0 = x^3 - 6x^2 + 9x = x \cdot (x^2 - 6x + 9) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_{2,3} = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad f''(x) = 6x - 12 \qquad f'''(x) = 6$

$P_{Min}(3;0) \qquad P_{Max}(1;4) \qquad P_W(2;2)$

1.2 Graph:



1.3 $A = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{27}{4} FE$

1.4 $S(2;\,2)$

Schnittpunkte: $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \Rightarrow \quad S_1(2;2) \quad S_2(4;4) \quad S_3\left(\frac{1}{2};\frac{25}{8}\right)$

2 $A_O = 2a^2 + 4ah$

$V = a^2h$

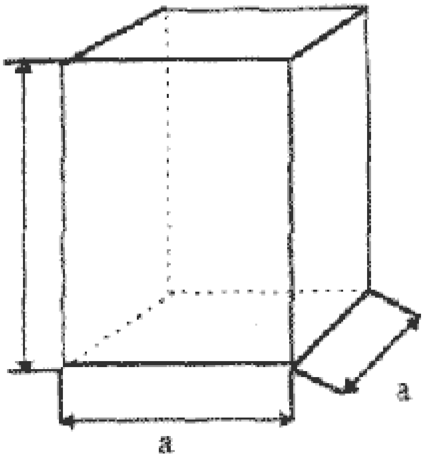
$A_O(a) = 2a^2 + \frac{8000}{a} = 2a^2 + 8000a^{-1}$

$A_O{}'(a) = 4a - 8000a^{-2}$

$A_O{}''(a) = 4 + 16000a^{-3}$

$a \approx 12{,}6cm \qquad h \approx 12{,}6cm \qquad A_O \approx 952{,}44cm^2$

a : h = 1 : 1



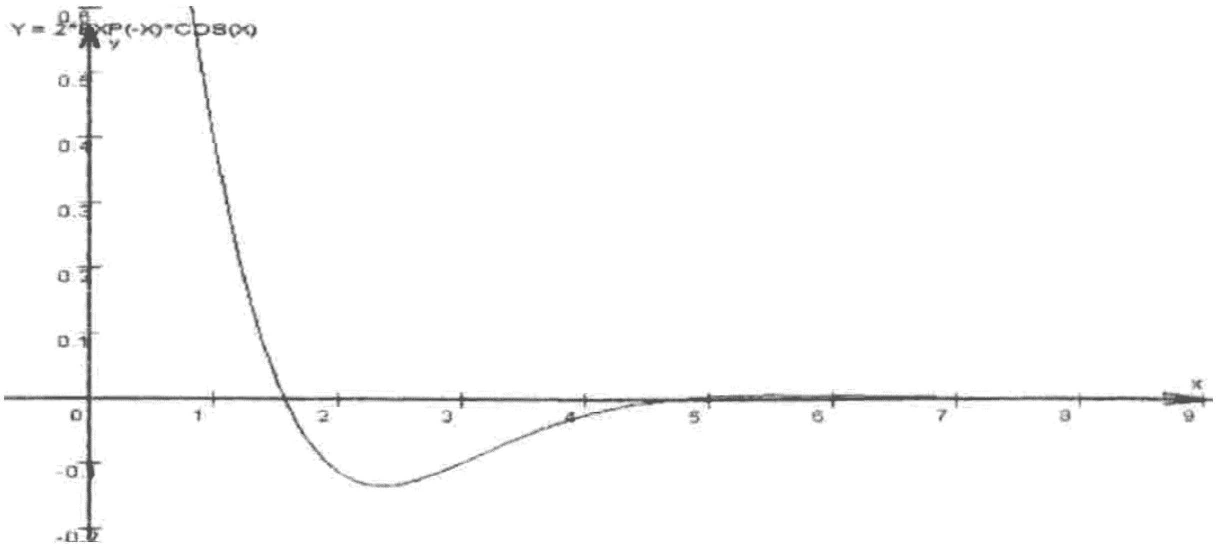
3 $y = f(t) = 2e^{-t} \cdot \cos t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

3.1 $0 = 2 \cdot e^{-t} \cdot \cos t \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{\pi}{2} \qquad t_2 = \frac{3\pi}{2}$

3.2 $f'(t) = -2 \cdot e^{-t} \cdot (\cos t + \sin t) \qquad f''(t) = 4 \cdot e^{-t} \cdot \sin t$

$P_{Min}\left(\frac{3\pi}{4}; \approx -0{,}13\right) \qquad P_{Max}\left(\frac{7\pi}{4}; \approx 0{,}006\right)$

3.3 Graph:



3.4 f(0) = 2 $\qquad f(2\pi) \approx 0{,}0037$ und Vergleich mit lokalen Extrema

W: $-0{,}13 \leq y \leq 2$

4 g: $B(-1;-2;-3)$ $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ h: $C(5;2;1)$ $E(3;2;2)$

4.1 g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

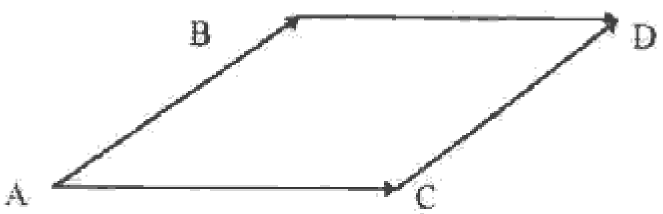
4.2 $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 1 \quad r = -2$ $A(1;2;3)$

4.3 $\overrightarrow{BA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\cos \angle ABC = \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{52}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{68}} \qquad \varphi = 32{,}58°$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi \qquad A \approx 16{,}61FE$$

4.4



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 5 \\ y_D - 2 \\ z_D - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $D(3;-2;-5)$